ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

Лемма Бореля — Кантелли

В этом параграфе мы докажем простое, но важное утверждение, являющееся основным средством при исследовании свойств, выполняющихся с вероятностью единица.

Сначала мы установим, что вероятностные меры обладают определённым свойством непрерывности.

Лемма 3.1 (непрерывность вероятностной меры)

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *задана последовательность событий* $A_1, A_2, \dots$

(i) *Если* $A_n \subseteq A_{n+1}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

(ii) *Если* $A_n \supseteq A_{n+1}$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Лемма Бореля — Кантелли

Доказательство

(i) Обозначим $B_1 = A_1$ и $B_{n+1} = A_{n+1} \backslash A_n$, $n \geqslant 1$. Тогда последовательность событий $B_1, B_2, \ldots$ состоит из попарно несовместных событий и $A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ для любого $n \geqslant 1$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i) \to \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_i) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} B_n\Big) = \mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big).$$

Лемма Бореля — Кантелли

Доказательство

(ii) Обозначим $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$ и $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Тогда события $A, B_1, B_2, \ldots$ попарно несовместны и $A_n = A \bigcup \Big(\bigcup\limits_{i\geqslant n} B_i \Big)$ для любого $n \geqslant 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} \mathsf{P}(B_i)$ сходится и при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}(A) + \sum_{i\geqslant n} \mathsf{P}(B_i) \to \mathsf{P}(A).$$

$\square$

Лемма Бореля — Кантелли

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий, заданных на одном вероятностном пространстве, и пусть A есть событие, состоящее в том, что наступит бесконечно много событий A_k, т. е.

$$A = \{A_k \text{ б. ч.}\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k.$$

Другими словами, событие A есть множество исходов ω, которые бесконечное число раз (бесконечно часто) встречаются в последовательности $A_1, A_2, \ldots$

Лемма Бореля — Кантелли

Лемма 3.2 (Бореля — Кантелли)

Если $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) < \infty$, *то* $\mathsf{P}(A) = 0$.

Если $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) = \infty$ *и события* $A_1, A_2, \ldots$ *независимы, то* $\mathsf{P}(A) = 1$.

Доказательство

Пусть $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) < \infty$. Тогда в силу леммы 3.1 (ii)

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant n} \mathsf{P}(A_k),$$

откуда следует первое утверждение.

Лемма Бореля — Кантелли

Доказательство

Если события $A_1, A_2, \ldots$ независимы, то таковыми же будут события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots$ Тогда для любого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(\overline{A}_k),$$

откуда нетрудно вывести, что для любого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\Big) = \prod_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(\overline{A}_k).$$

Лемма Бореля — Кантелли

Доказательство

Из неравенства $1 - x \leqslant e^{-x}$ получаем:

$$\prod_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(\overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathsf{P}(A_k)) \leqslant \exp\Big\{ -\sum_{k\geqslant n} \mathsf{P}(A_k) \Big\} = 0.$$

Следовательно, для любого $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k \Big) = 1 - \mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k \Big) = 1$$

и, значит, $\mathsf{P}(A) = 1$. $\square$

Замечание

Обозначим $\nu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} I_{A_k}$ — число появлений событий A_k. Тогда $\mathsf{E}\nu = \sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k)$, и первое утверждение леммы Бореля — Кантелли о том, что $\mathsf{E}\nu < \infty$ влечёт $\mathsf{P}(\nu < \infty) = 1$, выглядит тривиальным, тогда как второе, означающее, что $\nu < \infty$ с вероятностью 1 влечёт $\mathsf{E}\nu < \infty$, оказывается весьма содержательным. Из него следует, что если $\mathsf{P}(\nu < \infty) = 1$, но $\mathsf{E}\nu = \infty$, то события A_k с необходимостью зависимы.

Лемма Бореля — Кантелли

Лемма 3.3

Пусть X — случайная величина. Тогда $\mathsf{E}|X| < \infty$ *в том и только в том случае, когда* $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X| \geqslant k) < \infty$.

Доказательство

Поскольку в силу леммы (2.5)

$$\mathsf{E}|X| = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}(|X| \geqslant t)\, dt = \sum_{k \geqslant 1} \int\limits_{k-1}^{k} \mathsf{P}(|X| \geqslant t)\, dt,$$

то

$$\sum_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X| \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}|X| \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X| \geqslant k-1) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X| \geqslant k).$$

Лемма 3.4

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Тогда либо* $\mathsf{E}|X_1| < \infty$ *и с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий* $\{|X_k| \geqslant k\}$*, либо* $\mathsf{E}|X_1| = \infty$ *и события* $\{|X_k| \geqslant k\}$ *с вероятностью 1 происходят бесконечно часто.*

Доказательство

Если $\mathsf{E}|X_1| < \infty$, то по лемме 3.3

$$\sum_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant k) = \sum_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X_1| \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}|X_1| < \infty,$$

откуда по лемме Бореля — Кантелли $\mathsf{P}(|X_k| \geqslant k$ б. ч.$) = 0$.
Аналогично, если $\mathsf{E}|X_1| = \infty$, то $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant k) = \infty$ и
$\mathsf{P}(|X_k| \geqslant k$ б. ч.$) = 1$, так как события $\{|X_k| \geqslant k\}$ независимы. $\square$

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Как и в математическом анализе, в теории вероятностей приходится иметь дело с различными видами сходимости случайных величин. Ниже будут рассмотрены основные виды сходимости.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Начнём с определений. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Определение

Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ *сходится по вероятности* к X, и пишут $X_n \xrightarrow{P} X$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение

Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ сходится к X *почти наверное*, и пишут $X_n \to X$ п. н., если

$$\mathsf{P}(\omega\colon X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1.$$

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Лемма 3.5

Соотношение $X_n \to X$ *п. н. равносильно любому из следующих утверждений:*

(i) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий* $\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\}$.

(ii) $\sup\limits_{k \geqslant n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$ *при* $n \to \infty$.

(iii) *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k \geqslant n} \{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\} \Big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Доказательство

$X_n \to X$ п. н. тогда и только тогда, когда для всех $\omega \in A$, такого, что $\mathsf{P}(A) = 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n = n(\omega, \varepsilon)$ такой, что $|X_k(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant n$. Т. е. для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n}\{|X_k - X| < \varepsilon\}\Big) = 1.$$

Последнее равенство равносильно тому, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}\{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что $\mathsf{P}(|X_k - X| \geqslant \varepsilon$ б. ч.$) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$, что совпадает с (i). И наоборот, из (i) следует (3.1).

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Доказательство

Заметим, что последовательность событий $A_n = \bigcup\limits_{k \geqslant n} \{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\}$ такова, что $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, поэтому по лемме 3.1 (ii) $\mathsf{P}(A_n) \to \mathsf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$ при $n \to \infty$, так что (3.1) и (iii) равносильны.
Равносильность (ii) и (iii) очевидна, так как

$$A_n = \bigcup_{k \geqslant n} \{|X_k - X| \geqslant \varepsilon\} = \{\sup_{k \geqslant n} |X_k - X| \geqslant \varepsilon\}.$$

$\square$

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Лемма 3.6

Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность положительных чисел таких, что* $\varepsilon_n \to 0$. *Тогда, если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon_n) < \infty,$$

то $X_n \to 0$ *п. н.*

Доказательство

Пусть $A_n = \{|X_n| \geqslant \varepsilon_n\}$. Тогда по лемме Бореля — Кантелли с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий A_n. А это означает, что для всех $\omega \in A$, такого, что $\mathsf{P}(A) = 1$, найдётся такое $N = N(\omega)$, что $|X_n(\omega)| \leqslant \varepsilon_n$ при $n \geqslant N$. Но $\varepsilon_n \to 0$, поэтому $X_n(\omega) \to 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$. □

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Лемма 3.7

(i) *Если* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$, *то* $X_n \to 0$ *п. н.*

(ii) *Если* $X_1, X_2, \ldots$ *независимы, то* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$ *тогда и только тогда, когда* $X_n \to 0$ *п. н.*

Доказательство

Пусть $\sum_{n\geqslant 1} \mathsf{P}(|X_n| \geqslant \varepsilon) < \infty$, тогда по лемме Бореля — Кантелли с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $\{|X_n| \geqslant \varepsilon\}$. В силу леммы 3.5 это эквивалентно сходимости $X_n \to 0$ п. н.

Утверждение (ii) доказывается аналогично, с использованием второго утверждения леммы Бореля — Кантелли. $\square$

Лемма 3.8

Пусть $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин,* $\alpha > 0$. *Тогда*

$$\frac{X_n}{n^{1/\alpha}} \to 0 \quad \text{п. н.} \tag{3.2}$$

в том и только том случае, когда $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Доказательство

Соотношение (3.2) эквивалентно сходимости $n^{-1}|X_n|^\alpha \to 0$ п. н. По лемме 3.7 это означает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathsf{P}\left(\frac{|X_n|^\alpha}{n} \geqslant \varepsilon\right) < \infty.$$

Так как случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены, последнее условие эквивалентно тому, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathsf{P}\left(\frac{|X_1|^\alpha}{\varepsilon} \geqslant n\right) < \infty,$$

что равносильно условию $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$ в силу леммы 3.3. $\square$

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Замечание

Независимость случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ использовалась только при выводе условия $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$ из соотношения (3.2). Обратное утверждение справедливо без предположения независимости.

Отметим также, что сходимость по вероятности

$$\frac{X_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{P} 0$$

имеет место для *любой* последовательности одинаково распределённых случайных величин (без каких-либо ограничений на моменты).

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Замечание

Действительно, $X_n/n^{1/\alpha} \xrightarrow{P} 0$ тогда и только тогда, когда для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\frac{|X_n|}{n^{1/\alpha}} \geqslant \varepsilon\right) = \mathsf{P}(|X_1| \geqslant \varepsilon n^{1/\alpha}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

а этим свойством обладает любая случайная величина.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Рассмотрим третий вид сходимости случайных величин.

Определение

Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится к X *в среднем порядка* p, $0 < p < \infty$, и пишут $X_n \xrightarrow{L_p} X$, если

$$\mathsf{E}|X_n - X|^p \to 0$$

при $n \to \infty$.

В анализе этот вид сходимости называют *сходимостью в смысле* L_p. При $p = 1$ эту сходимость называют сходимостью *в среднем*, а при $p = 2$ — сходимостью *в среднем квадратическом*.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

В математическом анализе для решения вопроса о сходимости в том или ином смысле последовательности функций оказывается полезным понятие *фундаментальной* последовательности, или *последовательности Коши*.

Введём аналогичные понятия для рассмотренных видов сходимости последовательностей случайных величин.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Определение

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *фундаментальна по вероятности*, если $|X_n - X_m| \xrightarrow{P} 0$ при $n, m \to \infty$.

Определение

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *фундаментальна почти наверное*, если последовательность $\{X_n(\omega)\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна для почти всех $\omega \in \Omega$, т. е. $X_n - X_m \to 0$ п. н. при $n, m \to \infty$.

Определение

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *фундаментальна в среднем порядка* p, если $\mathsf{E}|X_n - X_m|^p \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Замечание

Как показано в лемме 3.5 (ii), сходимость $X_n - X_m \to 0$ п. н. имеет место тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{n \geqslant m} |X_n - X_m| \xrightarrow{P} 0$ при $m \to \infty$.
Таким образом, фундаментальность почти наверное последовательности $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ равносильна условию

$\sup\limits_{n \geqslant m} |X_n - X_m| \xrightarrow{P} 0$ при $m \to \infty$.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Известно, что всякая фундаментальная числовая последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $a_n \in \mathbb{R}$, является сходящейся (критерий Коши).

Приведём аналогичные результаты для сходимости последовательности случайных величин.

Теорема 3.1 (критерий Коши)

Для того чтобы последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ была сходящейся в каком-нибудь смысле ($\xrightarrow{P}$, $\xrightarrow{\text{п. н.}}$, $\xrightarrow{L_p}$) к некоторой случайной величине X, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна в соответствующем смысле.

Доказательство

Очевидно, что фундаментальность следует из сходимости в силу неравенств

$$|X_n - X_m| \leqslant |X_n - X| + |X_m - X|,$$

$$\sup_{n \geqslant m} |X_n - X_m| \leqslant \sup_{n \geqslant m} |X_n - X| + \sup_{n \geqslant m} |X_m - X| \leqslant 2 \sup_{n \geqslant m} |X_n - X|,$$

$$\mathsf{E}|X_n - X_m|^p \leqslant C_p(\mathsf{E}|X_n - X|^p + \mathsf{E}|X_m - X|^p),$$

где $C_p = \max\{1, 2^{p-1}\}$ (см. C_r-неравенство (1.11)).

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Доказательство

Пусть последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна по вероятности. Положим $n_1 = 1$ и по индукции определим n_k как наименьшее $n > n_{k-1}$, для которого при всех $l, m \geqslant n$

$$\mathsf{P}(|X_l - X_m| \geqslant 2^{-k}) \leqslant 2^{-k}.$$

Обозначим $A_k = \{|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \geqslant 2^{-k}\}$. Тогда $\mathsf{P}(A_k) \leqslant 2^{-k}$, следовательно, $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathsf{P}(A_k) \leqslant 1$, и по лемме Бореля — Кантелли с вероятностью 1 произойдёт лишь конечное число событий A_k.
Т. е. для всех $\omega \in A$, $\mathsf{P}(A) = 1$, найдётся $k_0 = k_0(\omega)$ такое, что для всех $k \geqslant k_0$

$$|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| < 2^{-k}.$$

Доказательство

Тогда для всех $\omega \in A$ и всех $k, l \geqslant k_0$

$$|X_{n_k}(\omega) - X_{n_l}(\omega)| < 2^{-k+1}.$$

Таким образом, последовательность $\{X_{n_k}(\omega)\}$ фундаментальна и, следовательно, найдётся число $X(\omega)$ такое, что $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$ при $k \to \infty$. А это означает, в свою очередь, что $X_{n_k} \to X$ п. н. Тогда

$$|X_n - X| \leqslant |X_n - X_{n_k}| + |X - X_{n_k}| \xrightarrow{P} 0$$

при $k, n \to \infty$.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Доказательство

Пусть последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна почти наверное. Тогда для всех $n \geqslant m$

$$|X_n - X_m| \leqslant \sup_{n\geqslant m} |X_n - X_m| \xrightarrow{P} 0, \quad m \to \infty,$$

и, следовательно, $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна по вероятности. Но тогда, как только что было показано, существует такая подпоследовательность $\{X_{n_k}\}$, что $X_{n_k} \to X$ п. н. Построим теперь числовую последовательность $n_{k(n)} = \min\{n_k : n_k \geqslant n\}$. Тогда

$$\sup_{n\geqslant m} |X_n - X| \leqslant \sup_{n\geqslant m} |X_n - X_{n_{k(n)}}| + \sup_{n\geqslant m} |X - X_{n_{k(n)}}| \xrightarrow{P} 0,$$

т. е. $X_n \to X$ п. н. в силу леммы 3.5.

Доказательство

Пусть теперь последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ фундаментальна в среднем порядка p. Тогда в силу неравенства Маркова (1.2) она будет фундаментальна по вероятности, и, следовательно, существуют случайная величина X и подпоследовательность $\{n_k\}$ такие, что $X_{n_k} \to X$ п. н.

Покажем, что $\mathsf{E}|X_n - X|^p \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $\mathsf{E}|X_m - X_n|^p < \varepsilon$ для всех $m, n \geqslant N$. Тогда в силу леммы Фату

$$\begin{aligned} \mathsf{E}|X_n - X|^p &= \mathsf{E} \lim_{n_k \to \infty} |X_n - X_{n_k}|^p = \mathsf{E} \liminf_{n_k \to \infty} |X_n - X_{n_k}|^p \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{n_k \to \infty} \mathsf{E}|X_n - X_{n_k}|^p \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathsf{E}|X_n - X|^p \to 0$, $n \to \infty$. Поскольку $X = (X - X_n) + X_n$, то $\mathsf{E}|X|^p < \infty$ в силу C_r-неравенства (1.11). □